1 Likninger og ulikheter

> **restart:**

- solve(*ligning / ulikhet, x*) løser en *ligning* eller ulikhet med hensyn på den ukjente variabel x. Hvis x er den eneste ukjente kan x utelates

  solve({*ligninger / ulikheter*}, { $x, y, \cdots$ }) løser et system av n ligninger / ulikheter med hensyn på de ukjente variablene $x, y, \cdots$

1.2 Rasjonale likninger

Eksempel 1.2.1

Løs likningen $\frac{2x}{x-4}+\frac{3}{2}=1$

Løsning

> $lign := \frac{2x}{x-4}+\frac{3}{2}=1 : \%$

$$\frac{2x}{x-4}+\frac{3}{2}=1$$

> $solve(\%, x)$

$$\frac{4}{5}$$

Her oppgis kun verdien på x . Vil vi ha skrevet svaret som en ligning, kan vi gjøre det slik:

> $x = solve(lign, x)$

$$x=\frac{4}{5}$$

Plasserer vi x i en klammeparentes, får vi svaret som en ligning i en klammeparentes.

> $solve(lign, \{x\})$

$$\left\{x=\frac{4}{5}\right\}$$

eller

> $isolate(lign, x)$

$$x=\frac{4}{5}$$

Kontroll

> $subs(\%, lign)$

$$1=1$$

Mellomregning

> $lign$

$$\frac{2x}{x-4}+\frac{3}{2}=1$$

$> \mathit{lign} - \frac{3}{2}$

$$\frac{2x}{x-4} = -\frac{1}{2}$$

$> \%\,(x-4)$

$$2x = -\frac{x}{2} + 2$$

$> \% + \frac{1}{2}\,x$

$$\frac{5x}{2} = 2$$

$> \frac{\% \cdot 2}{5}$

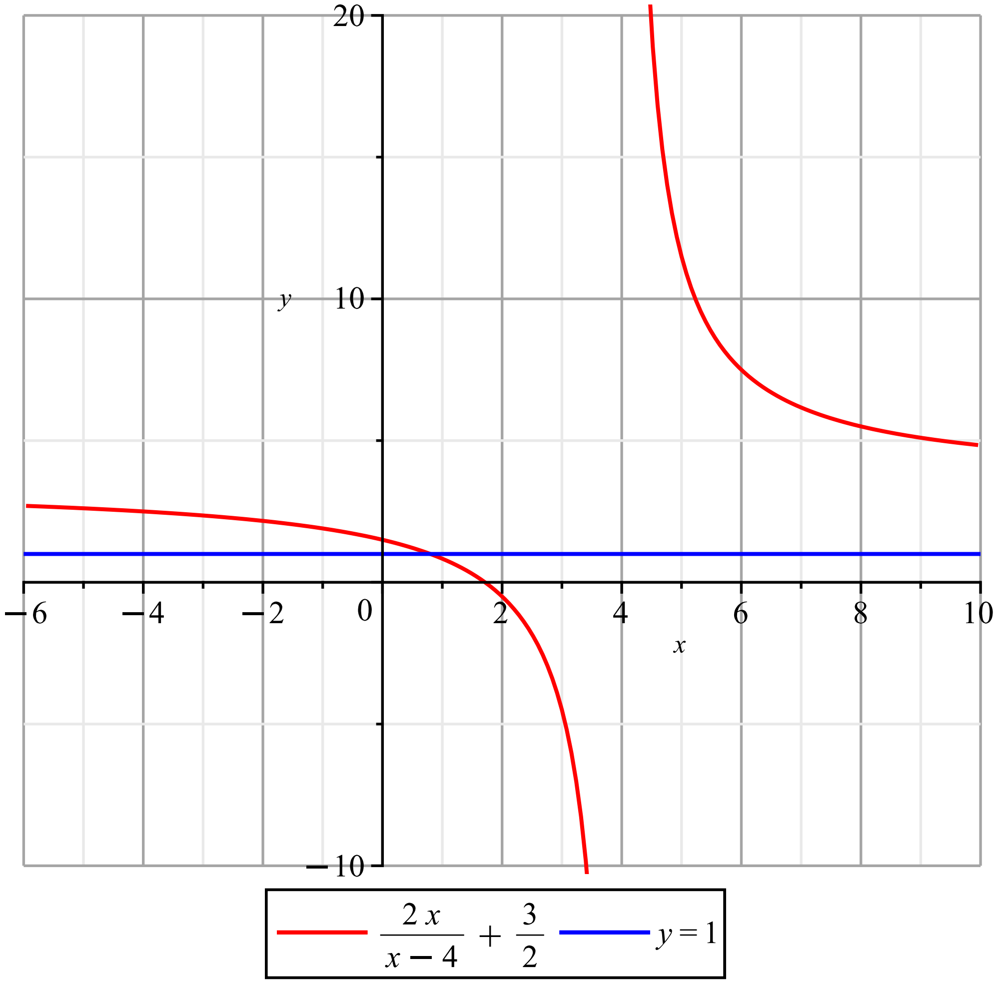
$$x = \frac{4}{5}$$

Grafisk løsning

$> f := \mathit{lhs}(\mathit{lign})$

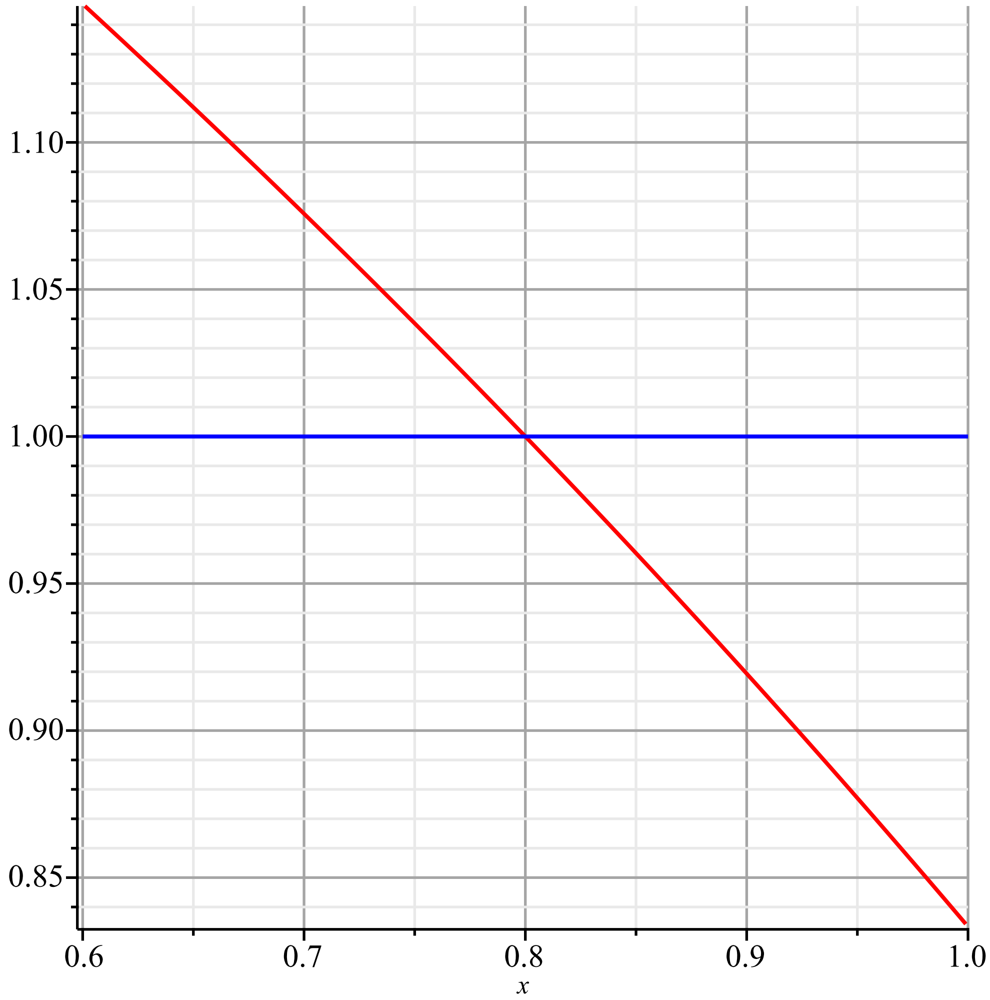
$$f := \frac{2x}{x-4} + \frac{3}{2}$$

$> \mathit{plot}([f, 1], x = -6..10, y = -10..20, \mathit{color} = [\mathit{red}, \mathit{blue}], \mathit{legend} = [\mathit{typeset}(f), y = 1],$
$\mathit{gridlines})$



Vi kan også lage en graf som bedre zoomer inn skjæringspunktet.

> $plot([f, 1], x = 0.6 ..1.0, color = [red, blue], gridlines)$



Eksempel 1.2.2

Løs likningen $\frac{x}{x-4} - \frac{2}{x-1} = \frac{x}{x-1}$

Løsning

> $lign := \frac{x}{x-4} - \frac{2}{x-1} = \frac{x}{x-1}$: %

$$\frac{x}{x-4} - \frac{2}{x-1} = \frac{x}{x-1}$$

> $isolate(lign, x)$

$$x = -8$$

Mellomregning

> $lign \cdot (x-4)\ (x-1)$

$$(x-4)\ (x-1)\left(\frac{x}{x-4} - \frac{2}{x-1}\right) = (x-4)\ x$$

> $simplify(\%)$

$$x^2 - 3\,x + 8 = (x-4)\ x$$

> $expand(\%)$

$$x^2 - 3\,x + 8 = x^2 - 4\,x$$

$> lhs(\%) - rhs(\%) = 0$

$$x + 8 = 0$$

$> \% - 8;$

$$x = -8$$

1.3 Lineære likningssett med flere enn to ukjente

Eksempel 1.3.1

Løs likningssettet

$x + 3y - z = 4$

$4x + 2y + 2z = 28$

$5x - y + 4z = 35$

Løsning

$> lign1 := x + 3y - z = 4 : \%$

$> lign2 := 4x + 2y + 2z = 28 : \%$

$> lign3 := 5x - y + 4z = 35 : \%$

$$x + 3y - z = 4$$

$$4x + 2y + 2z = 28$$

$$5x - y + 4z = 35$$

Vi løser likningssystemet direkte med solve.

$> solve(\{lign1, lign2, lign3\}, \{x, y, z\})$

$$\{x = 2, y = 3, z = 7\}$$

Kontroll

$> subs(\%, [lign1, lign2, lign3])$

$$[4 = 4, 28 = 28, 35 = 35]$$

Mellomregning

- eliminate($\{ligninger\}$, $\{variabler\}$) eliminerer de variable størrelsene gitt ved *variabler* fra ligningssystemet gitt ved *ligninger*

$> eliminasjon := eliminate(\{lign1, lign2, lign3\}, \{x\}) : \%$

$$[\{x = -3y + z + 4\}, \{-16y + 9z - 15, -5y + 3z - 6\}]$$

Her har Maple eliminert bort x fra to av ligningene. Så løser vi ligningene

$> eliminasjon[2]$

$$\{-16y + 9z - 15, -5y + 3z - 6\}$$

$> solve(\%)$

$$\{y = 3, z = 7\}$$

$> subs(\%, eliminasjon[1])$

$$\{x = 2\}$$

Vi kan også gå frem på denne måten.

$> zk := isolate(lign1, z) : \%$

$$z = -4 + x + 3y$$

> $sys := subs(zk, [lign2, lign3]) : \%$

$$[6x + 8y - 8 = 28, 9x + 11y - 16 = 35]$$

> $xk := isolate(sys[1], x) : \%$

$$x = 6 - \frac{4y}{3}$$

> $subs(xk, sys[2])$

$$38 - y = 35$$

> $yk := isolate(\%, y) : \%$

$$y = 3$$

> $subs(yk, xk)$

$$x = 2$$

> $subs(\%, yk, zk)$

$$z = 7$$

1.4 Likningssett som ikke er lineære

Ikke-lineære likningssett kan også løses ved kommandoen solve.

Eksempel 1.4.1

Løs likningssettet

$-x + 7y = 25$

$x^2 + y^2 = 25$

Løsning

> $lign1 := -x + 7y = 25 : \%;$
> $lign2 := x^2 + y^2 = 25 : \%$

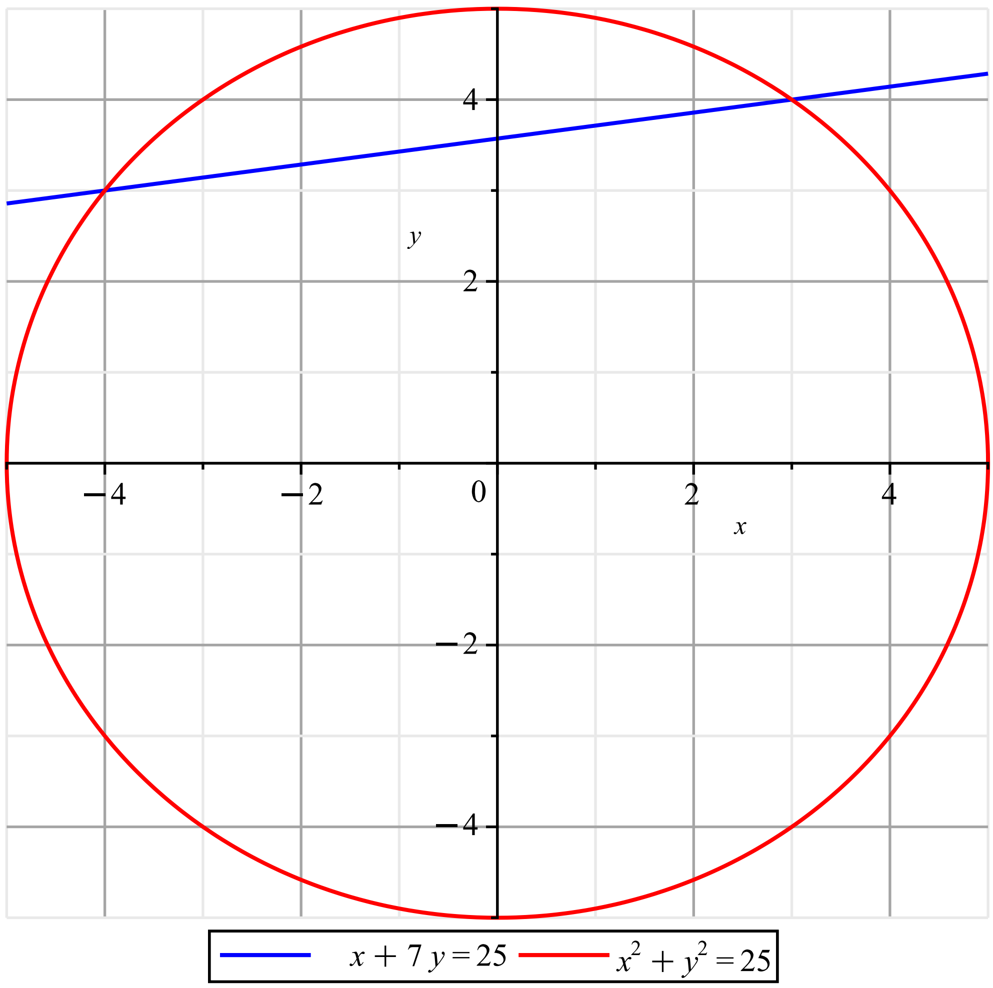
$$-x + 7y = 25$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

Vi kan fremstille hver av grafene ved implicitplot og vise grafene i samme koordinatsystem med display.

- implicitplot($lign, x = a..b, y = c..d$) plotter en ligning ved navn *lign* i de gitte intervallene for x og y
- display($plt1, plt2$) viser grafene ved navn *plt1* og *plt2* i samme koordinatsystem.

> $with(plots) :$
> $plt1 := implicitplot(lign1, x = -5..5, y = -5..5, color = blue, legend = typeset(lign1)) :$
> $plt2 := implicitplot(lign2, x = -5..5, y = -5..5, color = red, legend = typeset(lign2)) :$
> $display(plt1, plt2, gridlines)$



Vi løser likningssystemet.

> *solve*({*lign1*, *lign2*})

$$\{x = -4, y = 3\}, \{x = 3, y = 4\}$$

Vi ser at løsningene stemmer med grafen over.

Mellomregning

> *lign1*; *lign2*

$$-x + 7\,y = 25$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

Når x elimineres fra den første ligningen og innsettes i den andre ligningen, får vi

> *løsn* := *eliminate*({*lign1*, *lign2*}, *x*) : %

$$[\{x = 7\,y - 25\}, \{50\,y^2 - 350\,y + 600\}]$$

Vi finner verdiene ved å løse

> *løsn*[2]

$$\{50\,y^2 - 350\,y + 600\}$$

med hensyn på y.

> *solve*(%, {*y*})

$$\{y = 4\}, \{y = 3\}$$

> *map*(*subs*, [%], *løsn*[1])

$$[\{x = 3\}, \{x = -4\}]$$

map-kommandoen tar hver av y-ene og putter dem inn i utrykket for x.
Dermed har vi fått løsningene

1.5 Irrasjonale likninger

Øvingsoppgave 1.5.1

Løs likningen

$\sqrt{x^2+x-2} = 2-2x$

Løsning

> $lign := \sqrt{x^2+x-2} = 2-2x$: %

$$\sqrt{x^2+x-2} = 2-2x$$

> $solve(lign, \{x\})$

$$\{x=1\}$$

Kontroll

> $subs(\%, lign)$

$$0=0$$

Mellomregning

> $lign$

$$\sqrt{x^2+x-2} = 2-2x$$

> $lhs(\%)^2 = rhs(\%)^2$

$$x^2+x-2=(2-2x)^2$$

En annen måte å kvadrere venstre og høyre side på er:

> $map(x \to x^2, lign)$

$$x^2+x-2=(2-2x)^2$$

> $lhs(\%) - rhs(\%) = 0$

$$x^2+x-2-(2-2x)^2=0$$

Forenkler likningen

> $simplify(\%)$

$$-3x^2+9x-6=0$$

Så løser vi andregradslikningen.

> $løsn := solve(\%, \{x\})$: %

$$\{x=1\}, \{x=2\}$$

Disse to løsningene må kontrolleres

> $subs(løsn[1], lign)$

$$0=0$$

Løsningen er korrekt.

> $subs(løsn[2], lign)$

$$\sqrt{4}=-2$$

Denne løsningen er ikke korrekt.

1.6 Ulikheter der x er i nevneren

Eksempel 1.6.1

Finn de verdiene av x som tilfredsstiller ulikheten

$$\frac{x-2}{x+5} \geq 0$$

Løsning

$> ulik := 0 \leq \frac{x-2}{x+5} : \%$

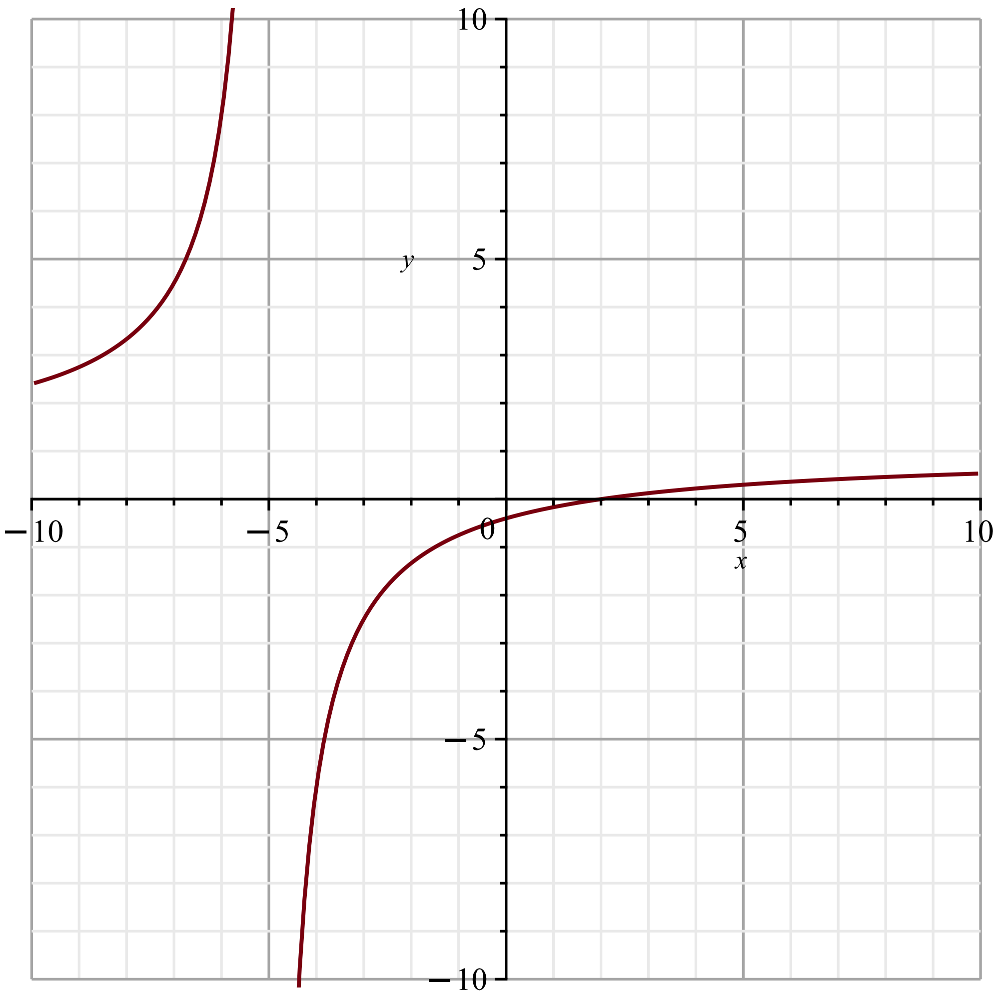
$$0 \leq \frac{x-2}{x+5}$$

$> solve(ulik, \{x\})$

$$\{x < -5\}, \{2 \leq x\}$$

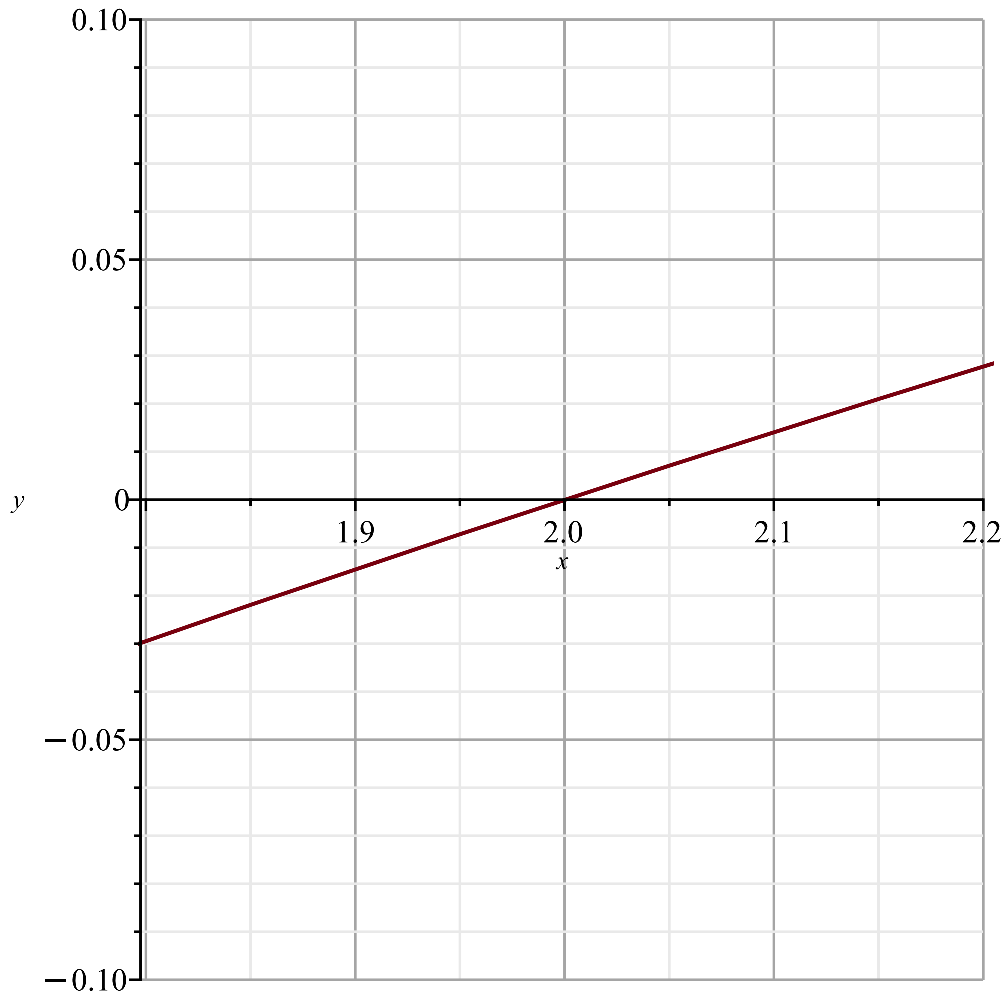
Vi kontrollerer løsningen ved å plotte grafen til $y = \frac{x-2}{x+5}$.

$> plt := plot\left(\frac{x-2}{x+5}, x=-10..10, y=-10..10, gridlines\right) : \%$



Vi kan zoome inn rundt $x = 2$

$> display(plt, view = [1.8..2.2, -0.1..0.1])$



Øvingsoppgave 1.6.2

Løs ulikheten $\frac{9x+17}{x+2} \le \frac{6x-10}{x-1}$

Løsning

$> ulik := \frac{9x+17}{x+2} \le \frac{6x-10}{x-1} : \%$

$$\frac{9x+17}{x+2} \le \frac{6x-10}{x-1}$$

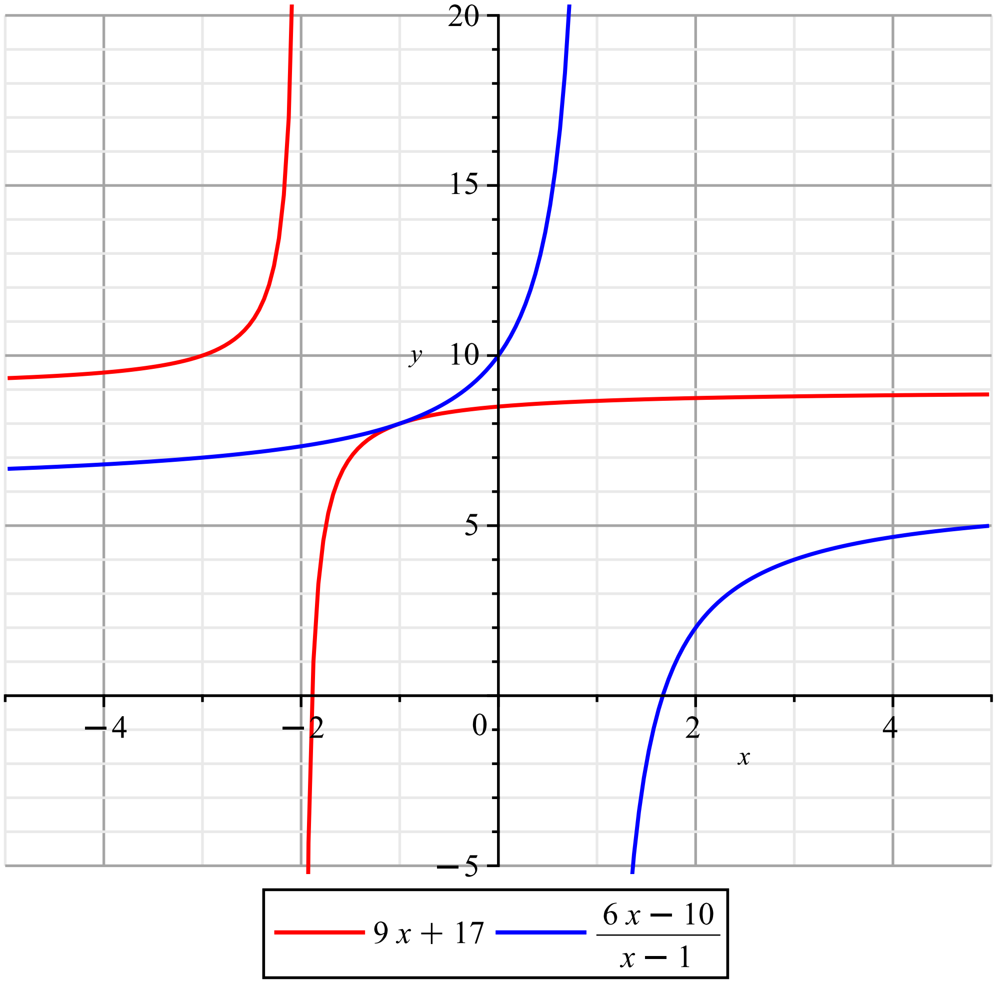
$> solve(ulik, \{x\})$

$$\{-2 < x, x < 1\}$$

$> f, g := 9x+17, \frac{6x-10}{x-1} :$

som sees av figuren under

$> plot\left(\left[\frac{9x+17}{x+2}, \frac{6x-10}{-1+x}\right], x=-5..5, y=-5..20, color=[red, blue], legend=[typeset(f), typeset(g)], gridlines\right)$



Mellomregning

$> lhs(ulik) - rhs(ulik) \leq 0$

$$\frac{9x+17}{x+2} - \frac{6x-10}{x-1} \leq 0$$

$> u := factor(\%) : \%$

$$\frac{3(x+1)^2}{(x-1)(x+2)} \leq 0$$

Telleren er alltid positiv. Nevneren kan drøftes på tallinjen, som man gjorde før med håndmakt

	____________-2______________ 1_______________ x
$(x+1)^2$	+ +
$(x-1)$	− − − − − − − − − − − − − − − − − − + + + + + + + +
$(x+2)$	− − − − − − − − + + + + + + + + + + + + + + +
$\frac{3(x+1)^2}{(x+2)(x-1)}$	+ + + + + + − − − − − − − − − − + + + + + + + +

Løser vi ulikheten

$> u$

$$\frac{3(x+1)^2}{(x-1)(x+2)} \leq 0$$

får vi

> $solve(u, \{x\})$

$$\{-2 < x, x < 1\}$$

>

som gir samme resultat som over.